## **培优课18 圆锥曲线中的定点、定值问题**

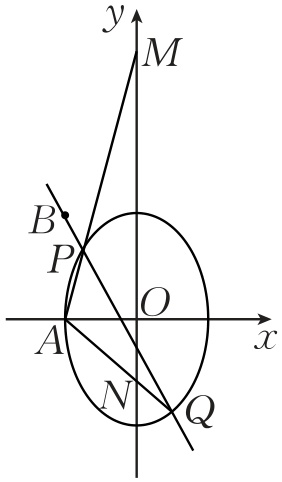
### **培优点一 定点问题**

#### **审题指导**

典例1 [2023·全国乙卷节选]已知椭圆，点在上，（审题①用点斜式前需考虑斜率是否存在）交于,两点，（审题②用尽可能少的变量表示出,的坐标），证明：（审题③表示出中点坐标后求解）.

**解题观摩**

[解析]，…………审题①



,，

联立消去得，

则，解得，

可得,，

因为，所以，…………审题②

令，解得，即,…………审题②

同理可得，

则…………审题

，

所以线段的中点是定点.

#### **通性通法**

**求解圆锥曲线中定点问题的两种方法**

1.特殊推理法：先从特殊情况入手,求出定点,再证明定点与变量无关.

2.直接推理法：（1）选择一个参数建立方程,一般将题目中给出的曲线方程（包含直线方程）中的常数当成变量,将变量,当成常数,将原方程转化为的形式;

（2）根据曲线（包含直线）过定点时与参数没有关系（即方程对参数的任意值都成立）,得到方程组

（3）以（2）中方程组的解为坐标的点就是曲线所过的定点,若定点具备一定的限制条件,可以特殊解决.

#### **培优训练**

##### **从证明线段中点为定点变为证明直线过定点设问变式**

[2022·全国乙卷]已知椭圆的中心为坐标原点，对称轴为轴、轴，且过,两点.

（1） 求的方程.

[解析]设椭圆的方程为，过,，则解得，，

所以椭圆的方程为.

（2） 设过点的直线交于，两点，过且平行于轴的直线与线段交于点，点满足.求证：直线过定点.

[解析],，所以直线的方程为，

①若过点的直线斜率不存在，则直线为，代入，

可得，，把代入方程，可得，由得到,求得的方程为，过点.

②若过点的直线斜率存在，

设直线,,.

联立得，

可得

且，

联立可得,.

可求得此时的方程为，

将代入整理得，

将代入，得,显然成立.

综上，直线过定点.

### **培优点二 定值问题**

典例2 已知椭圆，为坐标原点，（审题①找到两点横坐标的关系且）

，（审题②求出点的坐标），求证：（审题③由斜率之积的式子联想到设而不求）.

**解题观摩**

[解析].…………审题①

，…………审题②

直线的斜率，直线的斜率，

由得，

，…………审题③

， 直线的斜率与的斜率的乘积为定值.

#### **通性通法**

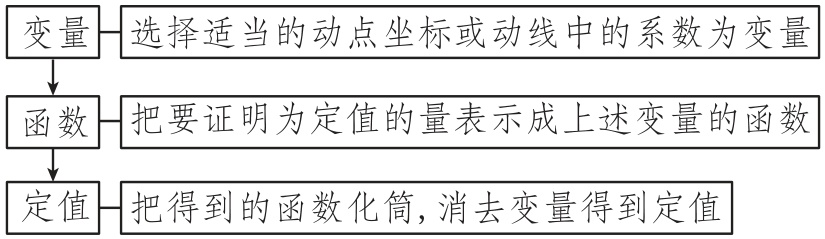
**圆锥曲线中定值问题的特点及两大解法**

1.特点：待证几何量不受动点或动线的影响而有固定的值.

2.两大解法

（1）从特殊入手,求出定值,再证明这个值与变量无关;

（2）引进变量法：其解题流程为



#### **培优训练**

##### **从证明直线的斜率之积为定值变为证明斜率之和为定值设问变式**

[2024·江苏模拟]在平面直角坐标系中，设为椭圆的左焦点，左准线与轴交于点，为椭圆的左顶点，已知椭圆长轴长为8，且.

（1） 求椭圆的标准方程.

[解析]因为，所以，又，所以，所以，，所以椭圆的标准方程为.

（2） 若过点的直线与椭圆交于两点，，设直线，的斜率分别为，.

①求证：为定值.

②求面积的最大值.

[解析]①当直线的斜率为0时，显然，.

当直线的斜率不为0时，设，

由得，

设，，则有，，

所以.

因为，所以.

综上所述，为定值.

②，即，当且仅当，即时取等号（此时符合），

所以面积的最大值为.